

Chapitre 2

Transformation de Fourier discrète

Table des matières

1. Introduction	1
2. Passage de la TF à la TFD	1
2.1. Signaux continus non-périodiques	1
2.2. Signaux discrets de durée infinie	2
2.3. Signaux discrets de durée finie	2
2.4. Discrétisation de la fréquence	4
3. Relations temps-fréquence	5
4. Pulsation et fréquence normalisées	7
5. Transformation de Fourier discrète	7
5.1. Définition de la TFD	7
5.2. TFD d'un signal périodique	8
5.3. TFD et FFT	8
5.4. Exemple d'analyse spectrale	9
6. Calcul de quelques spectres	10
6.1. Spectre d'une impulsion unité	10
6.2. Spectre d'un signal constant	10
6.3. Spectre d'un phaseur	12
6.4. Spectre d'une impulsion rectangulaire	12
6.5. Spectre d'une exponentielle décroissante	14
A. De la TF à la TFD : une illustration détaillée	15
A.1. Signal continu	15
A.2. Signal échantillonné	15
A.3. Signal tronqué	17
A.4. Discrétisation de la fréquence	17
A.5. Signal analysé par la TFD	18

B. TF, TFD et FFT	20
C. Algorithme de la FFT	22
D. Exercices	24

Chapitre 2

Transformation de Fourier discrète

1. Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer comment on passe de l'analyse de Fourier des signaux continus à l'aide de la transformation de Fourier (TF) au calcul numérique du contenu spectral d'un signal grâce à la transformation de Fourier discrète (TFD).

Dans cette progression, trois opérations interviennent explicitement :

- l'échantillonnage du signal temporel
- la limitation de la durée d'analyse de ce signal
- la discrétisation de la fréquence pour l'analyse spectrale.

Ces trois opérations, apparemment anodines, ont pourtant des conséquences dont il est important d'évaluer l'étendue.

Afin de clarifier au mieux les relations existant entre les espace temps et fréquence, on considérera par la suite que les signaux étudiés sont fournis sous la forme d'une tension électrique que l'on échantillonne régulièrement pendant une durée finie avant d'analyser numériquement son contenu spectral. Ainsi, pour chaque équation, on pourra préciser les unités des résultats obtenus.

Comme l'analyse qui suit est basée essentiellement sur trois propriétés de la transformation de Fourier, on les rappelle ci-dessous :

- au produit simple dans un espace correspond un produit de convolution dans l'autre

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow X(jf) \otimes Y(jf) \quad (1)$$

$$x(t) \otimes y(t) \longleftrightarrow X(jf) \cdot Y(jf) \quad (2)$$

- la TF d'un peigne d'impulsions de Dirac est également un peigne de Dirac

$$\delta_{T_e}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (3)$$

- la TF d'une impulsion rectangulaire de largeur Δt est un sinus cardinal

$$\text{rect}(t/\Delta t) \longleftrightarrow \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \quad (4)$$

2. Passage de la TF à la TFD

2.1. Signaux continus non-périodiques

Un signal analogique $x(t)$ et sa densité spectrale $X(jf)$ sont reliés entre eux par les relations :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [V \cdot \text{sec}] \quad (5)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi ft) df \quad [V] \quad (6)$$

Ces transformations directe et inverse montrent à l'évidence, la parfaite symétrie qui relie les espaces temps et fréquence (figure 1.a). A cette symétrie correspond la propriété suivante :

À un signal temporel continu non périodique correspond un spectre continu non périodique.

2.2. Signaux discrets de durée infinie

On considère ici que le signal continu $x(t)$ est échantillonné tous les multiples de la période d'échantillonnage T_e . On obtient alors un signal discret $x[n] = x(t = nT_e)$ (figure 1.c).

Mathématiquement, cette opération d'échantillonnage est équivalente à une multiplication du signal $x(t)$ par un peigne d'impulsions de Dirac distantes de T_e :

$$x[n] = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad (7)$$

Dans l'espace fréquentiel, le peigne de Dirac temporel $\delta_{T_e}(t)$ devient un peigne de Dirac périodique f_e (figure 1.b).

$$\Delta(f) \equiv TF\{\delta_{T_e}(t)\} = \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (8)$$

De plus, le produit simple dans l'espace temps conduit à un produit de convolution entre les spectres $X(jf)$ et $\Delta(f)$ (figure 1.c). On constate alors que :

À un signal échantillonné ou discret correspond un spectre continu et périodique f_e .

Le calcul du spectre $X_e(jf)$ d'un signal discret $x[n]$ se fait à partir de la définition de la transformation de Fourier des signaux continus (équation 5). On obtient alors :

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [V \cdot sec] \quad (9)$$

Partant de ce spectre $X_e(jf)$, on peut bien entendu revenir au signal temporel $x[n]$:

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [V] \quad -\infty < n < +\infty \quad (10)$$

2.3. Signaux discrets de durée finie

Dans le cas où l'on désire traiter numériquement un signal, le nombre de valeurs $x[n]$ ne peut pas être infiniment grand. On est donc contraint à ne prendre en compte qu'une partie du signal original. Mathématiquement, cette opération de troncation revient à multiplier le signal $x(t)$ par une fenêtre rectangulaire $w(t)$ de largeur T (figure 1.d).

À cette multiplication dans l'espace temps correspond un produit de convolution dans l'espace des fréquences entre le spectre du signal $X(jf)$ et le spectre en sinus cardinal de la fenêtre $w(t)$. Il

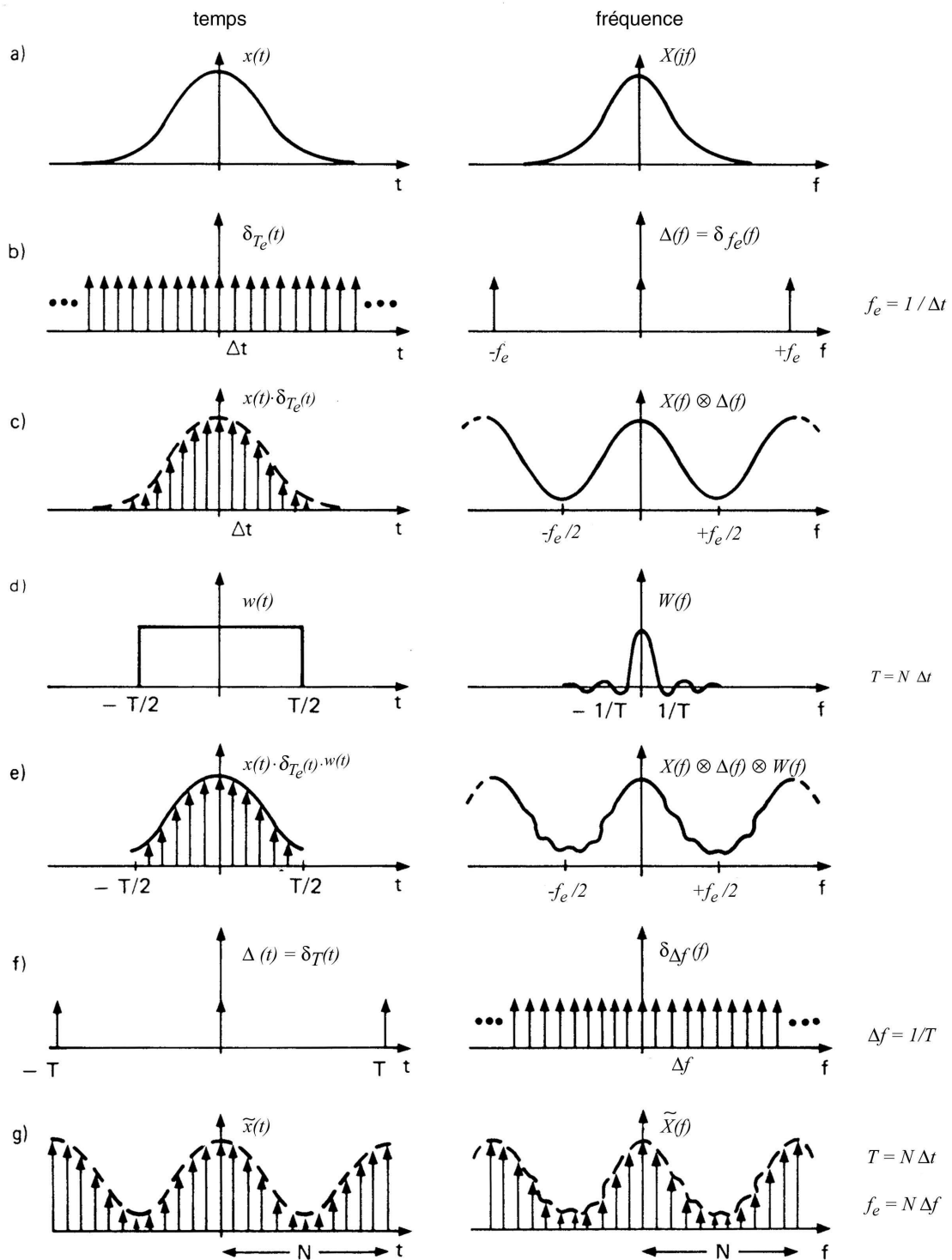


FIG. 1: Passage de la TF à la TFD [1]

en résulte une déformation du spectre original causée par les ondulations du sinus cardinal (figure 1.e).

Pour les calculs qui suivent, on considère que le signal $x(t)$ est enregistré pendant une durée finie T . Durant cet intervalle de temps, on échantillonne N valeurs du signal $x(t)$; on a donc $T = N \cdot T_e$.

La suite de valeurs discrètes $x_N[n]$ ainsi obtenue sera énumérée avec le compteur temporel n compris entre 0 et $N - 1$ et le spectre du signal tronqué se calcule alors comme suit :

$$X_{e,N}(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] \exp(-j2\pi f n T_e) \quad [V \cdot \text{sec}]$$

Il est bien clair que les N valeurs temporelles peuvent s'obtenir par transformation inverse de $X_{e,N}(jf)$:

$$x_N[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_{e,N}(jf) \exp(+j2\pi f n T_e) df \quad [V] \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Remarque :

Par la suite, aucune distinction ne sera faite entre $x_N[n]$ et $x[n]$ d'une part, et $X_{e,N}(jf)$ et $X_e(jf)$ d'autre part, car le contexte permettra toujours de savoir si la longueur N de la suite considérée est finie ou non et les 2 relations ci-dessus s'écriront :

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n T_e) \quad [V \cdot \text{sec}] \quad (11)$$

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi f n T_e) df \quad [V] \quad (12)$$

2.4. Discrétisation de la fréquence

Afin de pouvoir calculer numériquement un spectre, il est évidemment nécessaire de discrétiser la fréquence. En divisant le domaine fréquentiel en N intervalles, l'incrément fréquentiel vaut $\Delta f = f_e/N$ et les fréquences analysées, au nombre de N , sont :

$$f = k \cdot \Delta f = k \cdot f_e/N \quad (13)$$

Cette discrétisation de la fréquence n'est rien d'autre qu'un échantillonnage dans le domaine spectral et les résultats des opérations d'échantillonnage et de multiplication vues plus haut pour l'espace temps s'appliquent également dans l'espace des fréquences (figure 1.f et 1.g) et conduisent à la propriété suivante :

À la discrétisation du domaine spectral correspond un signal temporel périodique.

Tout se passe comme si la durée d'acquisition T correspondait à une période du signal temporel $x[n]$.

Le spectre considéré à présent est donc un spectre discret que l'on écrit $X[jk]$ avec $0 \leq k \leq N - 1$. Tenant compte des relations temps-fréquence, l'argument du phaseur s'écrit :

$$\pm j2\pi f n T_e = \pm j2\pi k \Delta f n T_e = \pm j2\pi k \frac{f_e}{N} n T_e = \pm j2\pi \frac{kn}{N} \quad (14)$$

Le spectre $X[jk]$ et le signal temporel $x[n]$ se calculent alors comme suit :

$$X[jk] = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [V \cdot \text{sec}] \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (15)$$

$$x[n] = \frac{1}{NT_e} \sum_{k=0}^{N-1} X[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [V] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (16)$$

3. Relations temps-fréquence

Les domaines temporel et fréquentiel sont bien entendu reliés entre eux. On peut le voir en décrivant les paramètres propres à chaque espace. Admettant que les deux espaces sont discrétisés avec le même nombre de points N , on peut noter les points suivants.

1. L'**espace du temps** est caractérisé par l'incrément temporel Δt (qui n'est autre que la période d'échantillonnage T_e) et la durée de l'enregistrement $T = N \Delta t$

$$\Delta t \equiv T_e = \frac{T}{N} \quad (17)$$

2. L'**espace des fréquences** est caractérisé par l'incrément fréquentiel Δf et la fréquence maximum f_{max} qui n'est autre que la fréquence d'échantillonnage f_e

$$\Delta f = \frac{f_{max}}{N} = \frac{f_e}{N} \quad (18)$$

Ces deux relations ayant en commun la période d'échantillonnage T_e et son inverse, la fréquence d'échantillonnage, on a :

$$\Delta t \equiv T_e \equiv \frac{1}{f_e} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta f} \quad (19)$$

On en déduit donc les 3 relations fondamentales liant les domaines temporel et fréquentiel

$$\Delta f = \frac{1}{T} \quad (20)$$

$$f_{max} \equiv f_e = \frac{1}{\Delta t} \equiv \frac{1}{T_e} \quad (21)$$

$$\Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \quad (22)$$

qui peuvent se traduire par les 3 propriétés suivantes.

1. *L'incrément fréquentiel Δf est l'inverse de la durée temporelle T .*
2. *Le domaine fréquentiel $f_{max} = f_e$ est l'inverse de l'incrément temporel Δt .*
3. *Pour un nombre donné de points N , il n'est pas possible d'avoir simultanément une très bonne définition temporelle (Δt petit) et une très bonne définition fréquentielle (Δf petit).*

Une illustration des relations existant entre les domaines temporel et fréquentiel est donnée dans la figure 2.

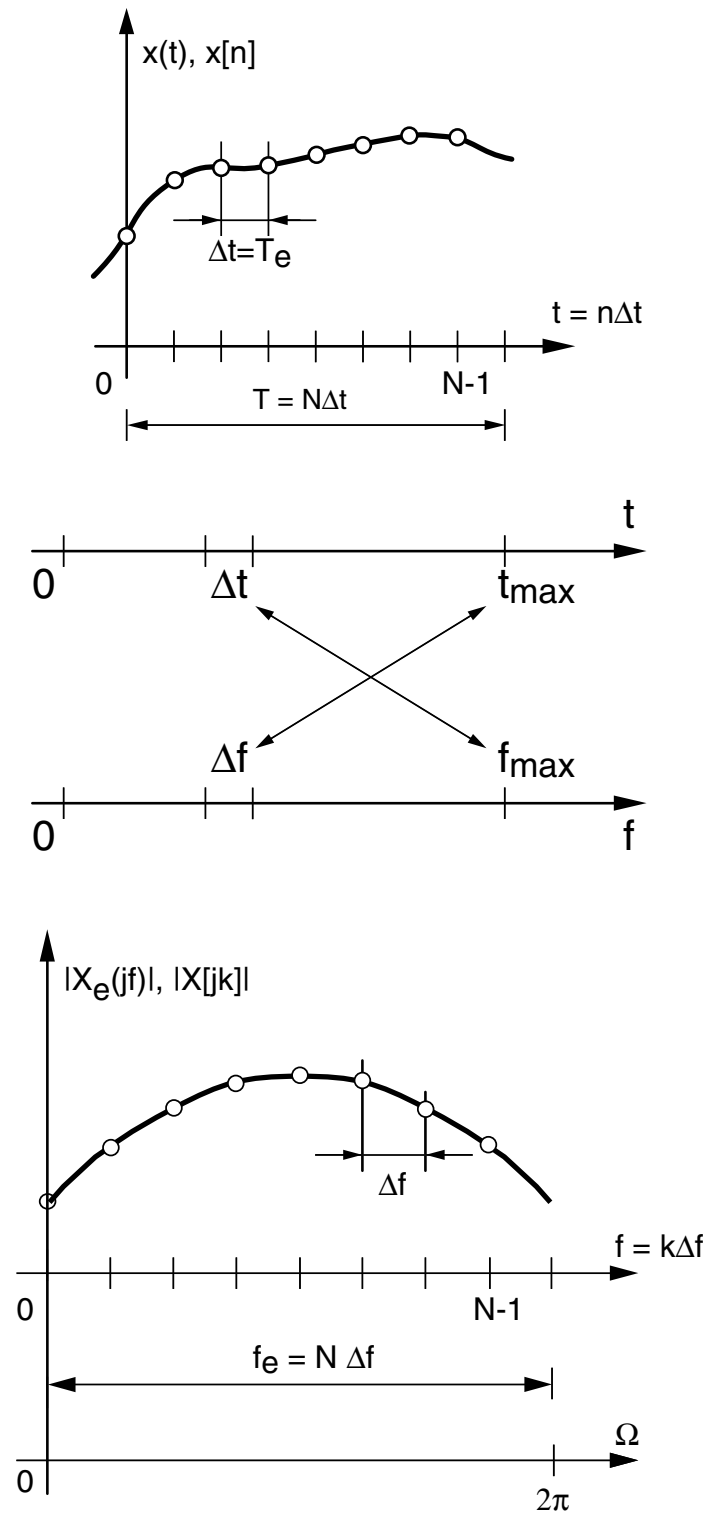


FIG. 2: Relations temps – fréquence

4. Pulsation et fréquence normalisées

Dans ce qui précède, on a constamment vu apparaître un phaseur faisant intervenir l'argument $\pm j2\pi n f T_e$:

$$\exp(\pm j2\pi n f T_e)$$

Il est donc naturel de chercher à alléger l'écriture en définissant la pulsation numérique ou normalisée Ω qui s'exprime en radians (figure 2) :

$$\Omega \equiv 2\pi f T_e = 2\pi \frac{f}{f_e} [\text{rad}] \quad (23)$$

Comme le spectre de base est compris entre $\pm f_e/2$, on voit que la pulsation normalisée prendra ses valeurs entre $\pm\pi$ et que les transformations de Fourier s'écrivent :

$$X_e(j\Omega) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-jn\Omega) \quad [V \cdot \text{sec}] \quad (24)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_e(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad [V] \quad (25)$$

5. Transformation de Fourier discrète

5.1. Définition de la TFD

En observant les relations (15) et (16), on constate que, mis à part le changement de signe du phaseur et les coefficients précédant la somme, les calculs du spectre $X[jk]$ ou du signal $x[n]$ se font de la même manière. Ceci conduit à définir les algorithmes des transformations de Fourier discrètes directe ou inverse comme suit :

$$X_D[jk] \equiv \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [V] \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (26)$$

$$x_D[n] \equiv \sum_{k=0}^{N-1} X_D[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [V] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (27)$$

La comparaison des équations 26 et 15, ainsi que 27 et 16 montre que les résultats de la TFD sont reliés aux spectres et signaux réels par les relations suivantes :

$$X[jk] = T_e \cdot X_D[jk] \quad (28)$$

$$x[n] = \frac{x_D[n]}{N} \quad (29)$$

5.2. TFD d'un signal périodique

Nous venons de voir que le passage de la TF à la TFD peut modifier de manière sensible les résultats de l'analyse spectrale. Cela n'est heureusement plus vrai si le signal temporel $x(t)$ est périodique car, on se trouve alors dans la situation idéale où les raies spectrales du signal $x_T(t)$ sont en parfaite coïncidence avec les raies analysées par la TFD. Pour remplir cette condition, il suffit d'enregistrer très exactement une ou plusieurs périodes du signal temporel.

En comparant les définitions de la décomposition en série de Fourier :

$$X_{SF}[jk] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp\left(-\frac{j2\pi kt}{T}\right) dt \quad [V] \quad (30)$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{SF}[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kt}{T}\right) \quad [V] \quad (31)$$

avec celles de la TFD (équations 26 et 27), on voit alors apparaître les relations suivantes :

$$X_{SF}[jk] = \frac{X_D[jk]}{N} \quad (32)$$

$$x_T(t = nT_e) = \frac{x_D[n]}{N} \quad (33)$$

5.3. TFD et FFT

L'invention de la transformation rapide de Fourier en 1965 par Cooley et Tukey [2] a été d'une importance majeure pour le traitement du signal car elle a permis d'envisager l'analyse spectrale numérique de signaux de longue durée en des temps raisonnablement courts.

En effet, le nombre d'opérations arithmétiques (sommations et produits) nécessitées par la TFD d'une suite de longueur N est proportionnel à N^2 . Ce qui, pour une suite de longueur 1000, conduit à calculer 1'000'000 de sinus et cosinus suivis d'une addition et d'une multiplication. Dans les années 1960, des calculs aussi longs n'étaient pas envisageables pour la plupart des applications.

La découverte de Cooley et Tukey réside dans l'observation que l'opération de la TFD globale peut être décomposée en la TFD de séquences de plus en plus courtes. Il en découle que le nombre total d'opérations est bien inférieur à celui imposé par la simple application de l'algorithme de la TFD. En contrepartie, le nombre de points analysés N doit être une puissance de 2.

Le nombre d'opérations demandées par le nouvel algorithme est alors proportionnel à $N \log_2(N)$ et le gain en temps de calcul se chiffre aisément :

$$\frac{N^2}{N \cdot \log_2(N)} = \frac{N}{\log_2(N)}$$

Ainsi, pour transformer 1024 points, le nouvel algorithme demande environ 100 fois moins de temps que la TFD :

$$\frac{N}{\log_2(N)} = \frac{1024}{10} = 102.4$$

L'algorithme de Cooley et Tukey a très vite été connu sous le nom de transformation rapide de Fourier et il est généralement désigné par son appellation anglo-saxonne : FFT (Fast Fourier Transform).

Il ne faut pas se méprendre sur la signification de cette appellation : l'algorithme FFT n'est qu'un moyen rapide d'obtenir les mêmes résultats que ceux fournis par la TFD. Ce n'est pas une nouvelle transformation ! Différents algorithmes de FFT sont présentés dans le livre de Burrus et Parks [3].

5.4. Exemple d'analyse spectrale

Voici un exemple d'analyse spectrale élémentaire faite à partir de l'enregistrement d'un signal inconnu dont on souhaite savoir s'il contient un signal périodique.

Le programme d'analyse (mises à part les commandes de traçage des résultats) se résume aux quelques lignes présentées dans la figure 3.

```
% lecture de l'enregistrement
enreg = load('enreg.txt');
tt = enreg(:,1);
xt = enreg(:,2);
xt = xt - mean(xt);

% analyse temporelle
Npts = length(xt);
dt = tt(2) - tt(1);
duree = tt(end) - tt(1) + dt

% analyse spectrale
df = 1/duree, fmax = 1/dt;
ff = 0 :df :fmax-df;
Xjf = fft(xt)/Npts;

% spectre unilatéral
Ndemi = round(Npts/2);
ffu = ff(1 :Ndemi);
Xjfu = 2*Xjf(1 :Ndemi);
```

FIG. 3: Programme d'analyse spectrale élémentaire

L'analyse des spectres d'amplitudes présentées dans la figure 4, montre que deux raies spectrales s'élèvent au-dessus du niveau moyen du bruit situé aux environs de 0.3. Ces deux raies spectrales ont une amplitude et une fréquence valant respectivement

$$A_1 \simeq 1.02 \quad f_1 \simeq 1.25 \text{ kHz}$$

$$A_2 \simeq 0.85 \quad f_2 \simeq 1.40 \text{ kHz}$$

FIG. 4: Analyse spectrale d'un signal échantillonné

6. Calcul de quelques spectres

Dans ce paragraphe, on calculera les spectres de quelques signaux fondamentaux de durée infinie. Les spectres de ces signaux échantillonnés s'obtiennent à partir de la définition de la transformation de Fourier des signaux discrets :

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [V \cdot \text{sec}]$$

Admettant, comme on le fait généralement, une période d'échantillonnage T_e unité, il vient :

$$X_e(jf) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [V] \quad (34)$$

Ce calcul peut également se faire avec la pulsation normalisée $\Omega = 2\pi fT_e$; on a alors :

$$X_e(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-jn\Omega) \quad [V] \quad (35)$$

6.1. Spectre d'une impulsion unité

Dans ce cas, on a :

$$x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (36)$$

$$X_e(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] \exp(-jn\Omega) = \delta[0] = 1 \quad (37)$$

A une impulsion unité, correspond donc un spectre périodique f_e constant égal à 1 dans toute la bande de base allant de $-f_e/2$ à $+f_e/2$ ou de $-\pi$ à $+\pi$.

6.2. Spectre d'un signal constant

Dans ce cas, on a :

$$x[n] = 1 \quad \forall n \quad (38)$$

$$X_e(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \exp(-jn\Omega) = \delta(\Omega) = \begin{cases} \infty & \text{si } \Omega = 2k\pi \\ 0 & \text{si } \Omega \neq 2k\pi \end{cases} \quad (39)$$

A un signal constant unité, correspond donc un spectre périodique f_e constitué d'une suite d'impulsions de Dirac $\delta(\Omega)$ situées en 0 et tous les multiples de $f = f_e$ ou de $\Omega = 2\pi$.

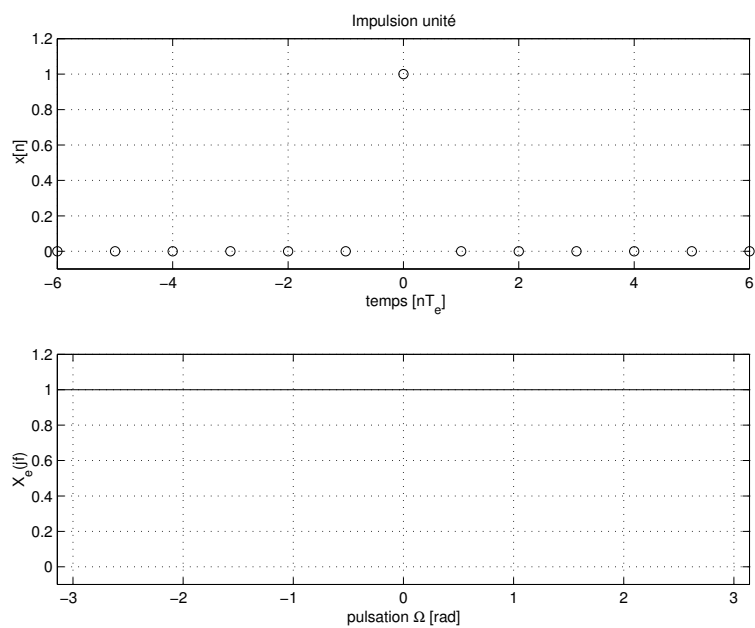


FIG. 5: Impulsion unité et son spectre

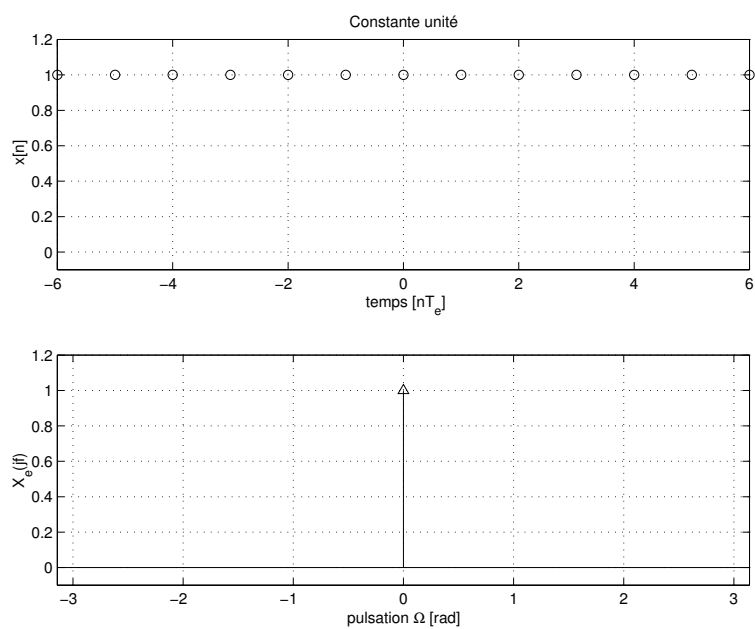


FIG. 6: Signal constant et son spectre

6.3. Spectre d'un phaseur

Dans ce cas, on a :

$$x[n] = \exp(jn\Omega_0) = \cos(n\Omega_0) + j \sin(n\Omega_0) \quad (40)$$

$$X_e(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-jn\Omega_0) \cdot \exp(-jn\Omega)$$

$$X_e(j\Omega) = \delta(\Omega - \Omega_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } \Omega = \Omega_0 + 2k\pi \\ 0 & \text{si } \Omega \neq \Omega_0 + 2k\pi \end{cases} \quad (41)$$

A un phaseur de pulsation Ω_0 , correspond donc un spectre périodique f_e constitué d'une suite d'impulsions de Dirac situées en $f = f_0 + k f_e$ ou $\Omega = \Omega_0 + 2k\pi$.

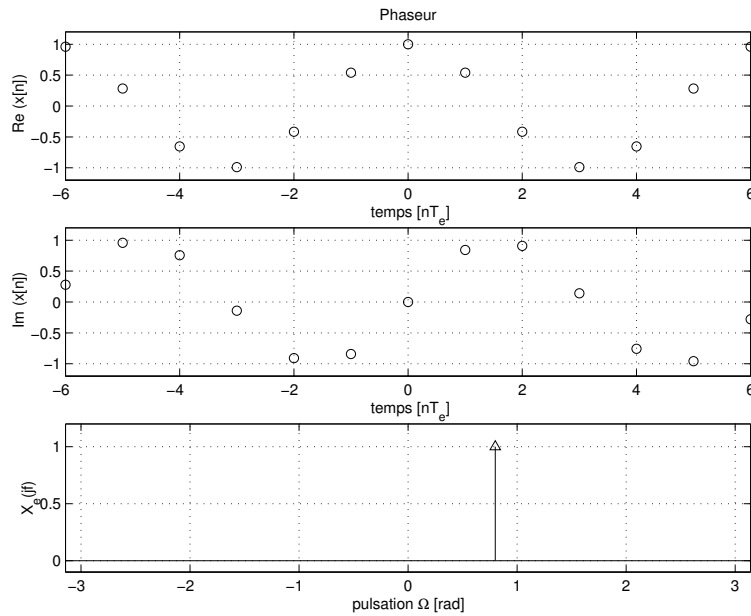


FIG. 7: Phaseur et son spectre

6.4. Spectre d'une impulsion rectangulaire

On considère ici une impulsion de largeur $2m + 1$. Dans ce cas, on a :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } -m \leq n \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (42)$$

$$X_e(j\Omega) = \sum_{n=-m}^{+m} 1 \cdot \exp(-jn\Omega) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+m} \cos(n\Omega) \quad (43)$$

Si l'on veut faire apparaître une fonction proche du sinus cardinal auquel on pourrait s'attendre pour une impulsion rectangulaire, on peut considérer le phaseur de l'équation (43) comme la raison d'une suite géométrique dont on calcule la somme. L'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$\begin{aligned} X_e(j\Omega) &= \sum_{n=-m}^{+m} \exp(-jn\Omega) \\ &= \frac{\exp(-j(-m)\Omega) - \exp(-j(m+1)\Omega)}{1 - \exp(-j\Omega)} \end{aligned}$$

En amplifiant la fraction par $\exp(+j\Omega/2)$, il vient :

$$\begin{aligned} X_e(j\Omega) &= \frac{\exp(j(m+1/2)\Omega) - \exp(-j(m+1/2)\Omega)}{\exp(+j\Omega/2) - \exp(-j\Omega/2)} \\ &= \frac{2j \sin((m+1/2)\Omega)}{2j \sin(\Omega/2)} \end{aligned}$$

En simplifiant et en arrangeant les termes, on obtient finalement une expression rappelant la fonction sinus cardinal :

$$X_e(j\Omega) = \frac{\sin(2(m+1)\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \quad (44)$$

L'amplitude de ce spectre en $\Omega = 0$ est égale à la largeur de l'impulsion $2m+1$ et le spectre passe par 0 tous les multiples de $\pi/(2m+1)$.

On notera que le spectre d'une impulsion rectangulaire discrète ne peut pas être exactement un sinus cardinal car celui-ci n'est pas périodique.

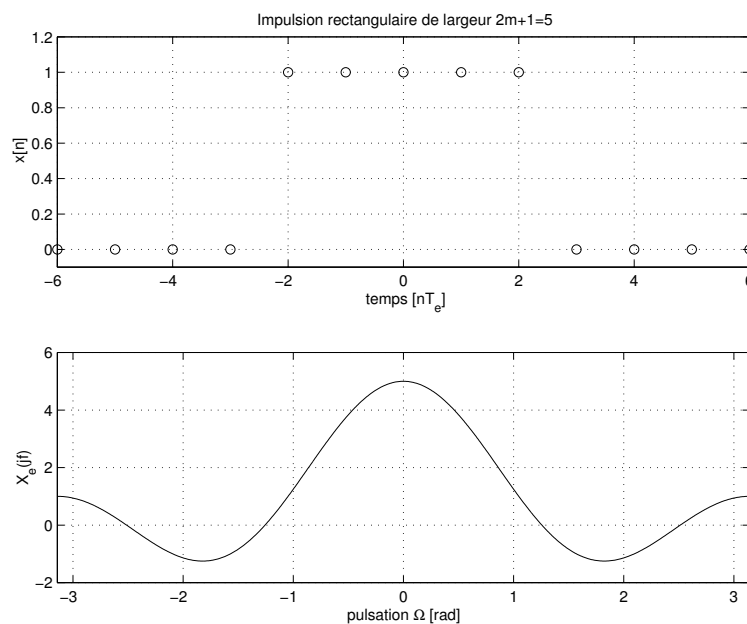


FIG. 8: Impulsion rectangulaire et son spectre

6.5. Spectre d'une exponentielle décroissante

On se souvient qu'une exponentielle discrète est représentée par $x[n] = a^n \cdot u[n]$. Si la constante a est inférieure à 1, on aura une exponentielle décroissante. Dans ce cas, on a :

$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ a^n & \text{si } n \geq 0 \end{cases} \quad (45)$$

$$X_e(j\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot \exp(-jn\Omega)$$

Cette expression est la somme d'une suite géométrique de raison $a \exp(-j\Omega)$ dont le module est inférieur à 1. Dans ce cas, la somme converge et elle vaut :

$$X_e(j\Omega) = \frac{1}{1 - a \cdot \exp(-j\Omega)} \quad (46)$$

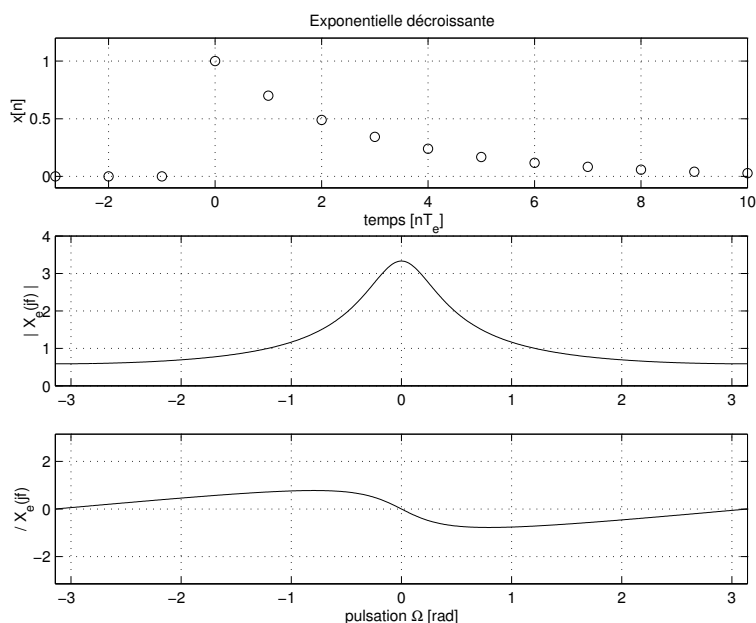


FIG. 9: Exponentielle décroissante et ses spectres d'amplitude et de phase

Annexes

A. De la TF à la TFD : une illustration détaillée

Afin d'illustrer le passage de la TF à la TFD et les modifications spectrales que cela entraîne, on considère le signal suivant :

$$x(t) = U_0 e^{-t/\tau} \cdot \varepsilon(t) \quad [V]$$

avec $U_0 = 1[V]$ et $\tau = 1[msec]$.

Ce signal sera ensuite échantillonné aux instants multiples de $T_e = 0.25 [msec]$, puis tronqué. Pour chaque étape, on calculera et dessinera les spectres correspondants.

Dans le but de bien mettre en évidence les différences de valeurs numériques entre chaque étape, on s'attachera également à calculer la valeur spectrale en $f = 0$ car cette valeur particulière correspond à l'intégrale temporelle du signal.

A.1. Signal continu

On montre aisément que la transformée de Fourier de ce signal (figure 10) vaut :

$$X(jf) = U_0 \tau \frac{1}{1 + j2\pi f \tau}$$

Pour $f = 0$, on trouve :

$$X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = U_0 \tau = 1 \cdot 10^{-3} [Vsec]$$

A.2. Signal échantillonné

L'échantillonnage avec $T_e = \tau/4 = 0.25 [msec]$ (figure 11) conduit au signal discret

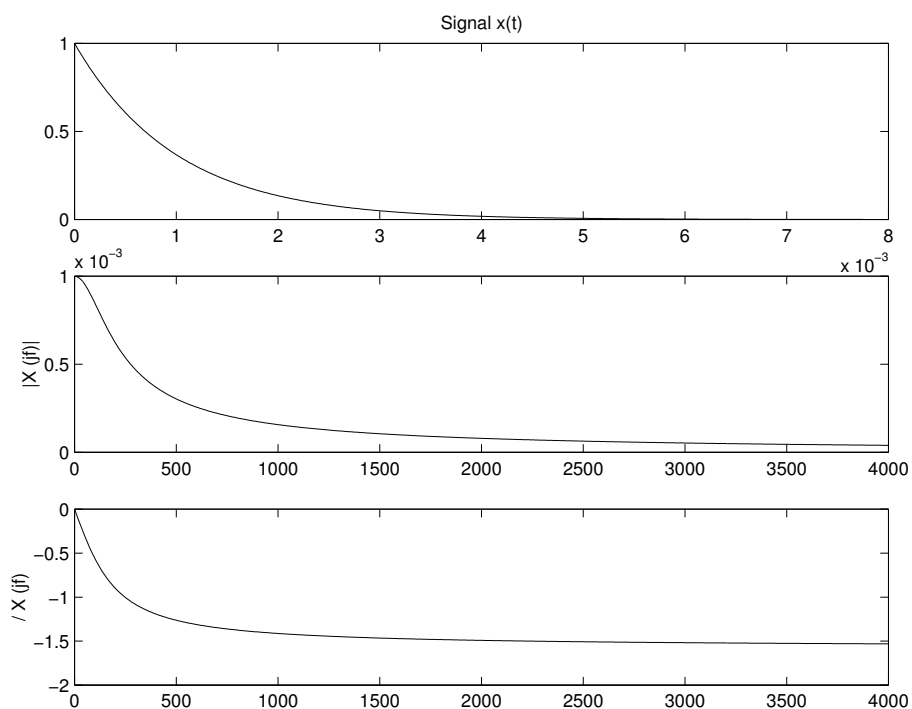
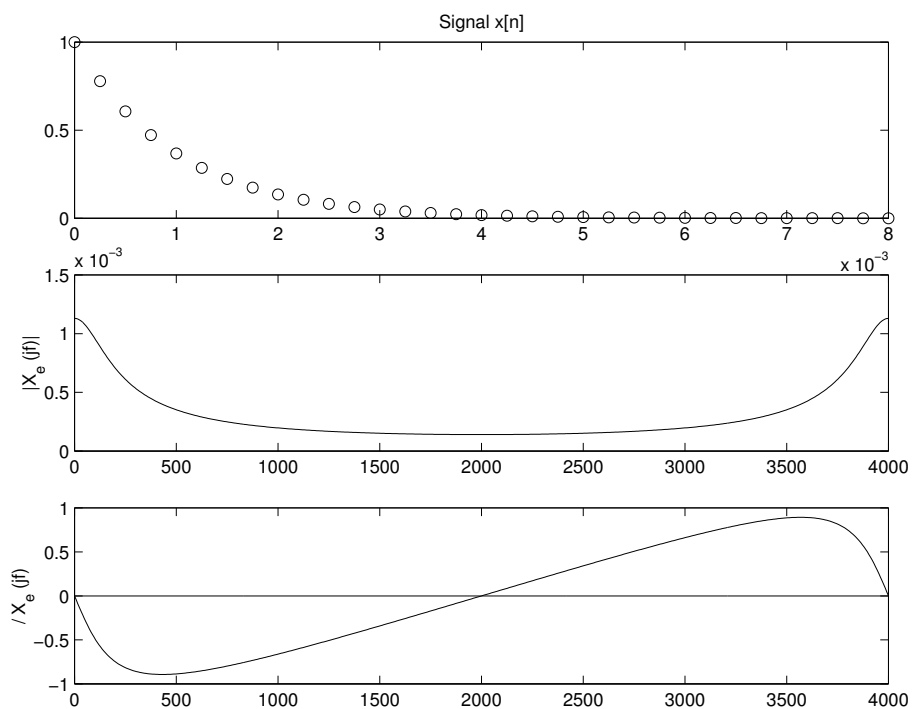
$$x[n] = U_0 \exp\left(-\frac{nT_e}{\tau}\right) = U_0 \exp\left(-\frac{T_e}{\tau}\right)^n = 0.779^n [V]$$

dont la transformée vaut :

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=0}^{+\infty} 0.779^n (e^{-j2\pi f T_e})^n = T_e \frac{1}{1 - 0.779 \cdot e^{-j2\pi f T_e}}$$

Pour $f = 0$, on trouve :

$$X_e(j0) = T_e \frac{1}{1 - 0.779} = 1.13 \cdot 10^{-3} [Vsec]$$

FIG. 10: Signal $x(t)$ et son spectre $X(jf)$ (amplitude et phase)FIG. 11: Signal échantillonné $x[n]$ et son spectre $X_e(jf)$

A.3. Signal tronqué

En ne gardant que les 8 premiers échantillons de $x[n]$ ($0 \leq n \leq 7$) et en annulant les autres, on tronque le signal (figure 12). Sa transformée de Fourier vaut alors :

$$X_{e,8}(jf) = T_e \sum_{n=0}^{+7} 0.779^n (e^{-j2\pi f T_e})^n = T_e \frac{1 - (0.779 \cdot e^{-j2\pi f T_e})^8}{1 - 0.779 \cdot e^{-j2\pi f T_e}}$$

Pour $f = 0$, on trouve :

$$X_{e,8}(j0) = T_e \frac{1 - 0.779^8}{1 - 0.779} = 0.977 \cdot 10^{-3} \text{ [Vsec]}$$

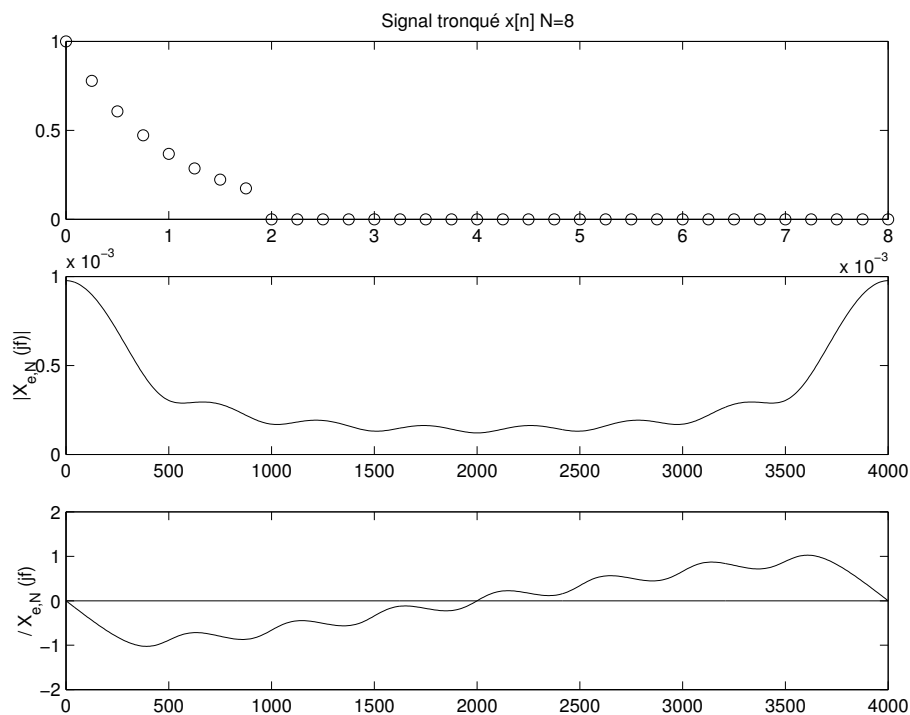


FIG. 12: Signal tronqué $x[n]$, $N = 8$ et son spectre $X_e(jf)$

A.4. Discrétisation de la fréquence

Comme nous n'avons retenu que 8 valeurs temporelles, on découpe l'espace des fréquences en 8 intervalles compris entre 0 et f_e (figure 13).

On obtient alors $\Delta f = f_e/N = 4000\text{Hz}/8 = 500\text{Hz}$ et :

$$X_8[jk] = T_e \sum_{n=0}^{+7} 0.779^n (e^{-j2\pi k/N})^n = T_e \frac{1 - (0.779 \cdot e^{-j2\pi k/N})^8}{1 - 0.779 \cdot e^{-j2\pi k/N}} = X_{e,8}(jf)|_{f=k \cdot \Delta f}$$

Pour $k = 0$, on trouve :

$$X_8[j0] = T_e \frac{1 - 0.779^8}{1 - 0.779} = 0.977 \cdot 10^{-3} \text{ [Vsec]}$$

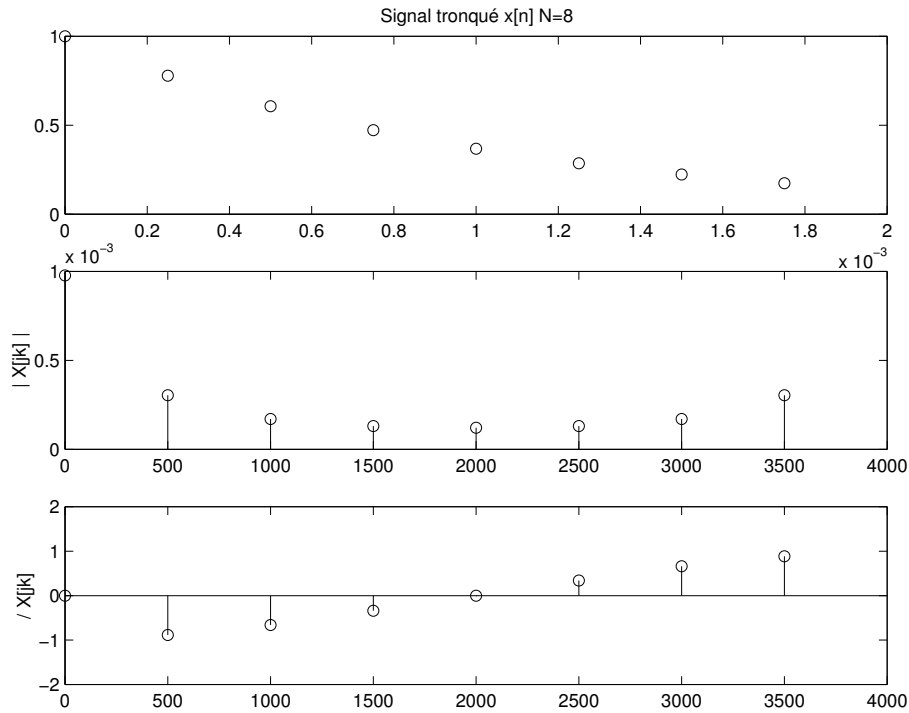


FIG. 13: Signal tronqué $x[n]$, $N = 8$ et son spectre échantillonné $X[jk]$

A.5. Signal analysé par la TFD

Dans ce cas, on ne se préoccupe pas de T_e et l'analyse porte sur 8 valeurs du signal $x[n]$ pour fournir 8 valeurs spectrales $X_D[jk]$ (figure 14). On obtient alors :

$$X_8[jk] = \sum_{n=0}^{+7} 0.779^n (e^{-j2\pi k/N})^n = \frac{1 - (0.779 \cdot e^{-j2\pi k/N})^8}{1 - 0.779 \cdot e^{-j2\pi k/N}} = \frac{1}{T_e} X_{e,s}(jf)|_{f=k \cdot \Delta f}$$

Pour $k = 0$, on trouve :

$$X_8[j0] = \frac{1 - 0.779^8}{1 - 0.779} = 3.91 \text{ [V]}$$

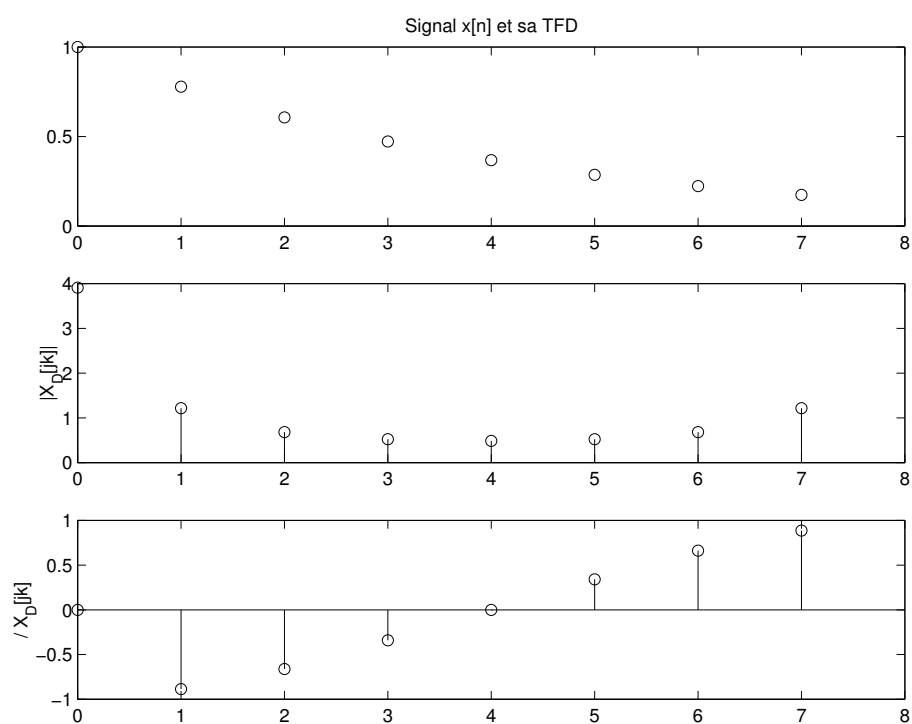


FIG. 14: Spectre obtenu par TFD

B. TF, TFD et FFT

Quelques propriétés de la transformation de Fourier sont rappelées dans le tableau 1 et le tableau 2 rappelle l'essentiel des relations que nous venons de voir dans ce chapitre.

a) définition	si $\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] < \infty$ alors	$X_e(jf) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi n f T_e)$
b) linéarité	$ax[n] + by[n]$	$aX_e(jf) + bY_e(jf)$
c) décalage	$x[n + n_d]$	$X_e(jf) \exp(+j2\pi n_d f T_e)$
d) modulation	$x[n] \exp(+j2\pi f_0 n T_e)$	$X_e(j(f - f_0))$
e) convolution	$h[n] \otimes x[n]$ $h[n] \cdot x[n]$	$H_e(jf) \cdot X_e(jf)$ $H_e(jf) \otimes X_e(jf)$
f) énergie	$W = T_e \sum_{-\infty}^{+\infty} x^2[n]$	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} X_e(jf) ^2 df$
g) valeurs à l'origine	$x[n = 0] = \int_{-\infty}^{+\infty} X_e(jf) df$	$X_e(f = 0) = T_e \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]$
h) rotation Oy	$y[n] = x[-n]$	$Y_e(jf) = X_e(-jf) = X_e^*(jf)$
j) fonction paire	$x[-n] = x[n]$	$X_e(jf) \in \Re$
k) fonction impaire	$x[-n] = -x[n]$	$X_e(jf) \in \Im$

TAB. 1: Quelques propriétés de la transformation de Fourier

$T_{max} = N\Delta t = 1/\Delta f$ $\Delta t = T_e = 1/f_e$	$\Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N}$	$f_{max} = f_e = 1/\Delta t$ $\Delta f = 1/T_{max}$
Signaux analogiques $x(t)$ $-\infty < t < +\infty$	$x(t) \Leftrightarrow X(jf)$ (Equ. 5, 6)	$X(jf)$ $-\infty < f < +\infty$
Signaux échantillonnés $x[n] = x(t = nT_e)$ $-\infty < n < +\infty$	$x[n] \Leftrightarrow X_e(jf)$ (Equ. 9, 10)	$X_e(jf)$ périodique f_e $0 \leq f < f_e$
Signaux tronqués $x[n]$ $0 \leq n \leq N - 1$	$x[n] \Leftrightarrow X_e(jf)$ (Equ. 11, 12)	$X_e(jf)$ périodique f_e $0 \leq f < f_e$
Fréquence discrétisée $x[n] = 0$ périodique N $0 \leq n \leq N - 1$	$f = k\Delta f$ $x[n] \Leftrightarrow X[jk]$ (Equ. 15, 16)	$X[jk]$ périodique N $X[jk] = X_e(jf) _{f=k\Delta f}$ $0 \leq k \leq N - 1$
TFD et FFT $x[n]$ périodique N $x[n] = x_D[n]/N$	$x_D[n] \Leftrightarrow X_D[jk]$ (Equ. 26, 27)	$X_D[jk]$ périodique N $0 \leq k \leq N - 1$
Séries de Fourier $x_T(t)$ périodique $T = 1/f_0$ $x_{SF}[n] = x[n] = x_D[n]/N$	$x_T(t) \Leftrightarrow X_{SF}[jk]$ (Equ. 30, 31)	$X_{SF}[jk] = X[jk]/T = X_D[jk]/N$ $0 \leq k \leq N - 1$

TAB. 2: Relations entre les transformations de Fourier

C. Algorithme de la FFT

```

function [xfr, xfi] = BP_fft(xtr, xti, signe);

% programme FFT / fmy 29.11.00
% xtr, xti: parties reelles et imaginaires du signal temporel
% xfr, xfi: parties reelles et imaginaires du spectre
% signe   : +1 => TFD directe; -1 => TFD inverse
%
% traduction MatLab d'un programme Fortran
% Réf.: C.S. Burrus, T.W. Parks
%       DFT/FFT and Convolution algorithms,
%       Wiley-Interscience, 1985, p. 108

% variables pour le calcul
xr = xtr;
xi = xti;

% initialisation
N = length(xr);      % longueur de x(t)
M = log(N)/log(2);   % puissance de 2: N=2^M
if signe > 0, signe = +1;
else signe = -1;
end;

% ajout de valeurs nulles si N n'est pas une puissance de 2
if M~= floor(M)
    M = ceil(M);
    N = 2^M;
    zz = zeros(1,N-length(xr));
    xr = [xr zz];
    xi = [xi zz];
end;

% table des cosinus et sinus
P = 2*pi/N;
for k1 = 1:N/2
    A      = (k1-1)*P;
    Wr(k1) = cos(A);
    Wi(k1) = -signe*sin(A);
end;

% fft à base 2 et entrelacement temporel
n2 = N;
for k1=1:M
    n1 = n2;
    n2 = n2/2;
    ie = N/n1;
    ia = 1;

```



```

for k2=1:n2
  for k3=k2:n1:N
    L = k3+n2;
    xtemp = xr(k3)-xr(L);
    ytemp = xi(k3)-xi(L);
    xr(k3) = xr(k3)+xr(L);
    xi(k3) = xi(k3)+xi(L);
    xr(L) = xtemp*Wr(ia) - ytemp*Wi(ia);
    xi(L) = xtemp*Wi(ia) + ytemp*Wr(ia);
  end;
  ia = ia + ie;
end;
end;

% désentrelacement
k1 = 1;
n1 = N-1;
for k2=1:n1
  if k2 < k1
    xtemp = xr(k1);
    xr(k1) = xr(k2);
    xr(k2) = xtemp;
    ytemp = xi(k1);
    xi(k1) = xi(k2);
    xi(k2) = ytemp;
  end;
  k3 = N/2;
  while k3 < k1
    k1 = k1 - k3;
    k3 = k3/2;
  end;
  k1 = k1+k3;
end;

% résultats
xfr = xr; xfi = xi;

```

Références

- [1] Randall R.B., *Frequency Analysis*, Brüel & Kjaer, 1987
- [2] Cooley J.W., Tukey J.W., "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", *Mathematics of Computation*, Vol. 19, April 1965
- [3] Burrus C.S., Parks T.W., *DFT/FFT and Convolution Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1985
- [4] B.P. Lathy, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992

D. Exercices

TFD 1 :

L'analyse spectrale, par la FFT, d'un signal $x[n]$ constitué de $N = 8$ valeurs a fourni son spectre discret $X_D[jk]$. De l'ensemble de ces valeurs, on a extrait les résultats partiels suivants :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_D[jk]$	4	$2+j$	$3+2j$	j	2						
$ X_D[jk] $											
$\angle X_D[jk]$											
$f [kHz]$											

1. Complétez le tableau et, sachant que $f_e = 1 [kHz]$, précisez les valeurs discrètes de la fréquence.
2. Le signal temporel $x_N[n]$ est-il continu, discret, périodique ?
3. Que vaut $x_N[n = 0]$?
4. Quelle est l'expression de $x_N[n]$?
5. Tracez $x_N[n]$.

TFD 2 :

On souhaite calculer le spectre d'une impulsion rectangulaire de largeur $\Delta t = 3 [msec]$ et d'amplitude $A = 5 [V]$. Pour ce faire, on acquiert 8 points à la fréquence $f_e = 1 [kHz]$.

1. Admettant que l'échantillonnage commence à l'apparition du flanc montant, dessinez $x(t)$ et $x[n]$.
2. Que vaut la durée d'acquisition t_{max} ?
3. Discutez les valeurs choisies pour $n = 0$ et $n = 3$.
4. Quel sera le domaine spectral analysé ; que vaudra l'incrément de fréquence Δf ?
5. Calculez $X_D[jk]$ pour $k = 0$ et $k = 2$; quel est le domaine de variation du compteur k des fréquences ?
6. Validez votre résultat en analysant la valeur de $X_D[jk = 0]$.

TFD 3 :

Considérant la suite de valeurs $x[n]$:

n	-m	-m+1	...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...	+m-1
x[n]	0	0	0	0	0.5	1	1	1	0.5	0	0	0

1. Esquissez $x[n]$ et une fonction $x(t)$ passant par ces points.
2. Calculez $X_D[jk]$; sa valeur dépend-elle de la longueur $N = 2m$ de la suite ?
3. Qu'est ce qui change si on ajoute des zéros pour doubler le nombre d'échantillons ?

TFD 4 :

Considérant un signal $x(t) = \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 2000t)$ échantillonné pendant une période à la fréquence $f_e = 8f_0$:

1. Dessinez la suite de valeurs $x[n]$.
2. Justifiez les résultats ci-dessous fournis par la la FFT puis précisez la relation existant avec ceux fournis par la décomposition en série de Fourier :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$X_D[jk]$	0	4	4	0	0	0	4	4

3. On échantillonne le signal $x(t)$ sur 4 périodes ; que donnera la FFT ?

TFD 5 :

On échantillonne avec une période d'échantillonnage $T_e = 1 [msec]$ une exponentielle décroissante

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) \varepsilon(t)$$

où $A = 5 [V]$, $\tau = 5 [msec]$.

1. Que vaut la densité spectrale $X(jf)$ du signal $x(t)$?
2. Calculez la suite des valeurs $x[n]$; exprimez la sous la forme $x[n] = A \cdot r^n$.
3. Calculez la TF $X_e(jf)$ de la suite infiniment longue $x[n]$.
4. On ne prend en compte que les 16 premières valeurs de la suite $x[n]$ et on annule les autres ; que vaut $X_{e,N}(jf)$.
5. Considérant la suite temporelle tronquée $x_N[n]$ avec $N = 16$, on discrétise l'axe des fréquences. Que vaut l'incrément fréquentiel ? Calculez le spectre discret $X_D[jk]$.
6. Que valent, pour chacun des spectres ci-dessus ($X(jf)$, $X_e(jf)$, $X_{e,N}(jf)$, $X_D[jk]$), les composantes spectrales lorsque $f = 0$?